QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ alors $\lim\limits_{+\infty} g$ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ n'existe pas. ☐ $-\infty$.

2. Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2,\ 5]$ tel que $f([2,\ 5]) = [1, 3]$ alors

☐ $f(2) = 3$ et $f(5) = 1$. ☐ $f(2) = 1$ et $f(5) = 3$. ☐ $1 < f(2) < 3$.

3. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2, 5]$ tel que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -2$ alors l'équation $f(x) = -1$

☐ n'admet pas de solution dans $[-2, 5]$.

☐ admet au moins une solution dans $[-2, 5]$.

☐ admet exactement une solution dans $[-2, 5]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire et si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ admet une limite finie en $+\infty$.
3. Si une fonction admet une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée.
4. Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
5. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x,

   $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 5$ alors f admet une limite en $+\infty$.

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}\sqrt{2|x|} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)|x-2| & \text{si } x\neq 2,\\ 1 & \text{si } x=2.\end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,\,3\}$ par $f(x)=\dfrac{-3x^2-x+10}{x^3+x^2-8x-12}$.

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -2 ?

4 Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement.

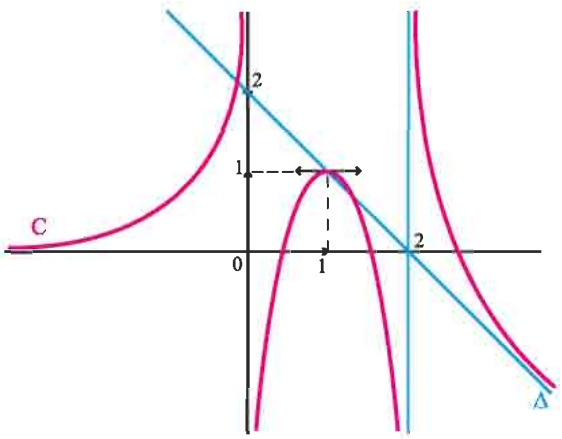
5 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-3x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-3x}{x^2-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.

1. $f:x\mapsto\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$, $x_0=-1$.
2. $f:x\mapsto\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
3. $f:x\mapsto\dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}$, $x_0=0$.
4. $f:x\mapsto\dfrac{1}{(x-1)^2}\sin\left((x-1)^2\pi\right)$, $x_0=1$.

7 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. La droite Δ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=2$ et $y=0$ sont des asymptotes à la courbe C.



1. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{-\infty}f$, $\lim\limits_{0^-}f$, $\lim\limits_{0^+}f$, $\lim\limits_{2^-}f$, $\lim\limits_{2^+}f$, $\lim\limits_{+\infty}f$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x-2$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

8 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f.

1. $f:x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$.
2. $f:x\mapsto\sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.
3. $f:x\mapsto\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x}$ en 0^+.

4. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x^4-2x^2+1}$ en 1.

9 On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\sin x$.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2. Montrer que pour tout réel positif x, $|f(x)| \le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)$ et interpréter les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

12 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Déterminer l'ensemble D_f de définition de la fonction f.

b. Montrer que pour tout réel de D_f, $f(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$.

2. a. Montrer que la droite D d'équation $y = x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

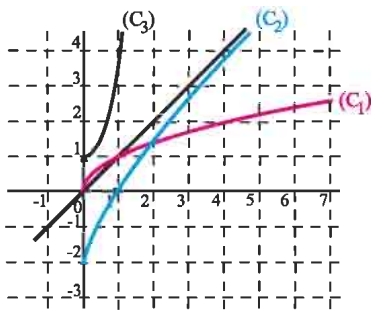
b. Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite D.

3. Etudier la nature de la branche infinie de C_f en $-\infty$.

4. Tracer C_f.

13 On a représenté trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x-\dfrac{2}{x+1}$.



1. Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.

2. Préciser pour chaque courbe la nature de sa branche infinie.

14 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto 2x-3\sqrt{x-1}$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$.

3. $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

15 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 de f.

1. $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

2. $f : x \mapsto 1+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}+\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

16 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2+\cos x}{x}$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{x \sin x}{x^4 + x^2 + 1}$.

4. $f : x \mapsto \cos x - x$.

17 On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$, $g : x \mapsto \dfrac{x \sin^4 x}{2x^3 + 1}$ et $h : x \mapsto -x^3 + 3\sin x$.

1. Montrer, pour $x \geq 1$, les inégalités $|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $|g(x)| \leq \dfrac{1}{2x^2}$ et $h(x) \leq -x^3 + 3$.

2. En déduire les limites en $+\infty$ de ces fonctions.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$.

1. a. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x \sin x}{1 + x^2}$.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $|xf(x)| \leq 2$.

b. En déduire $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(\pi - 2x)\cos x}{1 + \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^2}$.

20 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tout réel x, $a \leq \dfrac{1}{2 - \cos x} \leq b$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{2 - \cos x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x + \cos x}{2 - \cos x}$.

21 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(3x - 1)}{x}$.

2. $f : x \mapsto 4x^2 - 3\cos x$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - 2x}$.

4. $f : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x} + \sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2 telle que

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1], \\ f(x-1) & \text{si } x \in]1, 2]. \end{cases}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la restriction de f sur $[0, 4]$.

2. Montrer que pour tout réel x, $-1 \leq f(x) \leq 1$.

3. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $g : x \mapsto 2x$.

4. On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) + g(x)$.

a. Tracer la courbe représentative de la restriction de h sur $[0, 4]$.

b. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} h$ et $\lim\limits_{-\infty} h$.

23 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $I =]2, +\infty[$.

2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$, $I =]-\infty, 0]$.

3. $f : x \mapsto \tan(\pi x)$, $I =]-\dfrac{1}{2}, 0]$.

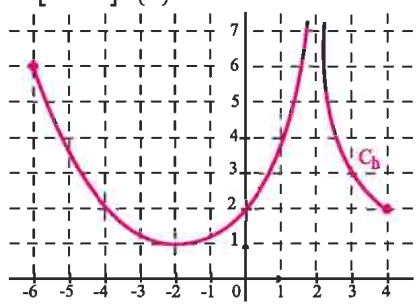
24 On considère la fonction $f : x \mapsto -2x^3 + 2x - 3$.

1. Représenter la courbe de f dans un repère.

2. Déterminer graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de cette équation.

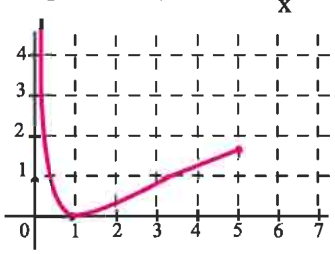
25 On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[-6, 4]\setminus\{2\}$.



1. Déterminer graphiquement les variations de f.
2. Déterminer $f([-6, 2[)$ et $f(]2, 4])$.
3. Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Déterminer $h([-6, 2[)$ et $h(]2, 4])$.
c. h est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

26 On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $]0, 5]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 3$.



1. Justifier la continuité de f sur $]0, 5]$.
2. Déterminer graphiquement les variations de f.
3. Déterminer $f(]0, 1])$ et $f([1, 5])$.
4. a. Déterminer graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} = 4$.

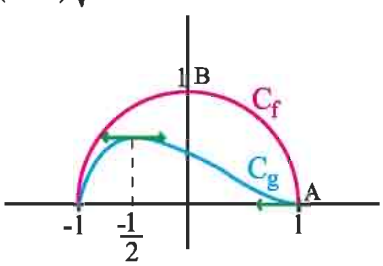
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près des solutions de cette équation.

27 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-1}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Déterminer $f([0, 1[)$ et $f(]1, +\infty[)$.
3. a. Montrer que l'équation $(x-1)\sqrt{x} = 1$ admet dans $[\dfrac{3}{2}, 2]$ une unique solution α.

b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

28 Dans la figure ci-dessous, les courbes C_f et C_g représentent les fonctions f et g définies sur $[-1,1]$ par et $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



Soit M un point de C_f d'abscisse x différent de 1. On désigne par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et on par $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AHM.

1. Exprimer $\mathcal{A}(x)$ à l'aide de x.
2. a. Déterminer graphiquement, la position du point M pour que l'aire du triangle AHM soit maximale.
b. Déterminer graphiquement, l'ensemble $I = \{\mathcal{A}(x),\ x \in [-1,1[\}$.
c. Montrer qu'il existe une position M_0 de M autre que B telle que l'aire $\mathcal{A}$ soit égale à celle du triangle OAB (on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse x_0 de M_0).

29 Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

1. Montrer que f possède un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe un réel α de $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$).
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

QCM :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) f(2)=3 et f(5)=1

3) admet au moins une solution dans $[-2,5]$

VRAI-FAUX :

1) (vrai)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{X\to-\infty} f(X) = -\infty$

2) (faux)

contre exemple : f(x)=x

f est croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

f n'est pas bornée

($\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$)

4) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

$\Delta : x = 0$ n'est pas une asymptote à (ζ_f)

5) (faux)

contre exemple : f(x)=4+sinx

$g(x)=3-\frac{1}{1+x^2}$; $h(x)=5+\frac{1}{1+x^2}$

on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 5$

mais f n'a pas de limite en $+\infty$

EX 1 :

pour x>0 on a : $f(x)=\frac{x}{x}\sqrt{2x} = \sqrt{2x}$

pour x<0 on a : $f(x)=-\sqrt{-2x}$

$f(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & \text{si } x \ge 0 \\ -\sqrt{-2x} & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{2x} = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} -\sqrt{-2x} = 0 = f(0)$

f est continue en 0

* la fonction : $x \mapsto 2x$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$

d'où f est continue sur $]0,+\infty[$

* de meme f est continue sur $]-\infty,0[$

conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

EX 2 :

• la fonction : $x \mapsto 1+\frac{1}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

(fonction rationnelle)

• la fonction : $x \mapsto x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$

en particulier sur $\mathbb{R}/\{2\}$

d'où la fonction : $x \mapsto |x-2|$ est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

par suite f est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

* continuité en 2 : f(2)=1

pour x>2 on a : $f(x)=(1+\frac{1}{x-2})(x-2)$

$f(x) = x-1$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(x-1) = 1 = f(2)$

pour x<2 : $f(x)=(1+\frac{1}{x-2})(-x+2) = -x+1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(-x+1) = -1 \ne f(2)$

f n'est pas continue en 2

EX 3 :

$$f(x)=\frac{-3x^2-x+10}{x^3+x^2-8x-12}$$

$D_f=\mathbb{R}/\{-2,3\}$

on a : $-3x^2-x+10=(x+2)(-3x+5)$

$x^3+x^2-8x-12=(x-3)(x+2)^2$

$d'où\quad f(x)=\frac{-3x+5}{(x-3)(x+2)}$

1) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{-3x+5}{(x-3)(x+2)}=-\infty$

(de la forme $\frac{-4}{0^+}$)

f n'admet pas une limite finie en 3

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en 3

2) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ (de la forme $\frac{11}{0^-}$)

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en (-2)

EX 4 :

$$f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$$

1) $x^2+x-6=0$

$\Delta=25$ x'=-3 et x"=2

d'où $D_f=\mathbb{R}/\{-3,2\}$

2)

x	-∞	-3		2	+∞
x^2+x-6	+	0	-	0	+

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

• pour x ∈]-∞,-3[

$$f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}}=\frac{(x+3).\sqrt{x^2+x-6}}{(x+3)(x-2)}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x)=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)}=0$$

• pour x ∈]-3,2[

$$f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{-x^2-x+6}}=\frac{-\sqrt{-x^2-x+6}}{(x-2)}$$

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=0$

d'où $\lim\limits_{x\to(-3)} f(x)=0$

f est prolongeable par continuité en (-3)

son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$

$$par : g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}} & \text{si } x\neq 2 \ ; x\neq -3\\ g(-3)=0\end{cases}$$

EX 5 :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{-3}{x-1})=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(\frac{-3}{x-1})=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{-3x}{x^2-1})=-\infty$ (de la forme $\frac{-3}{0^+}$)

$\lim\limits_{x\to 1^-}(\frac{-3x}{x^2-1})=+\infty$

3)

x	-∞	1		2	+∞
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-3x+2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-3x+2}=-\infty$$

4) * pour x>0

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

* pour x<0

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$d'où\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

EX 6 :

soit $P(x)=x^3+3x^2-2x-4$

$P(-1)=0$

$P(x)=(x+1).(x^2+ax+b)$

$=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$

$$identification\ \begin{cases}a+1=3\\a+b=-2\\b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}$$

$P(x)=(x+1).(x^2+2x-4)$

pour $x\neq -1$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^2+2x-4)}{x+1}=x^2+2x-4$$

$$\lim_{x\to(-1)}f(x)=\lim_{x\to(-1)}(x^2+2x-4)=-5$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2+2x-4 & \text{si } x\neq -1\\-5 & \text{si } x=-1\end{cases}$$ est le prolongement par continuité de f en (-1)

2) pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[/\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

$$f(x)=\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}$$

Rappelons que :

$$\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a-b}{2}).\sin(\frac{a+b}{2})$$

$$\sin a-\sin b=2\sin(\frac{a-b}{2}).\cos(\frac{a+b}{2})$$

$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin a-\sin b}=-tg(\frac{a+b}{2})$$

$$d'où\ :\ f(x)=-tg(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=-tg\frac{\pi}{4}=-1$$

$$d'où\ :\ g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq\frac{\pi}{4}\\-1 & \text{si } x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

3) pour $x\neq 0$

$$f(x)=-16\left[\frac{1-\cos(4x)}{(4x)^2}\right]$$

on pose $X=4x$ $\qquad x\to 0\ ,\ X\to 0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{X\to0}-16\left[\frac{1-\cos X}{X^2}\right]=-16\times\frac{1}{2}=-8$$

$$d'où\ \ g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq 0\\-8 & \text{si } x=0\end{cases}$$

4) on pose : $U(x)=(x-1)^2$

$$V(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

$f = V \circ U$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} U(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} V(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \end{cases}$$

$d'où \ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pi$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EX 7 :

$\Delta : y = -x + 2$

1)* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) + x - 2) = 0$

2)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	+	+ ‖	0	- ‖	-
f(x)	$+\infty$ ↗	‖ ↗	1 ↘	‖ $+\infty$ ↘	
	0	$-\infty$ ‖	$-\infty$	‖	$-\infty$

3)* $m \in]-\infty, 0] \cup \{1\}$

l'équation : f(x)=m admet trois solutions

* $m \in]0, 1[$

l'équation f(x)=m admet quatre solutions

* $m \in]1, +\infty[$

l'équation f(x)=m admet deux solutions

EX 8 :

1) On pose U(x)= $\dfrac{\pi x + 1}{x}$ et V(x)=cos(x)

f=VoU

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} U(x) = \pi \\ \lim\limits_{x\to \pi} V(x) = -1 \end{array}\right\rangle \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$$

2) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0 \end{array}\right\rangle \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

3) $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ *on pose* $X = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\sin(X)}{X^2}$$

$$= \lim_{X\to 0^+} \frac{\sin(X)}{X} \cdot \frac{1}{X} = +\infty$$

4) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2 - 1) - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$f = VoU$ *avec* $U(x) = x^2 - 1$ *et* $V(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} U(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} V(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

EX 9 :

$x \in [0, +\infty[$

$f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}).\sin x$

1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \dfrac{(x+2) - x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$

d'où f(x)= $\dfrac{2.\sin x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$

2) x>0

$|f(x)| = \dfrac{2.|\sin x|}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow 2|\sin x| \leq 2$

d'où $\dfrac{2.|\sin x|}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

EX 10 :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2})-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

d'où y=0 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$

d'où Δ:y=2x est une asymptote à (ζ_f)

au voisinage $(+\infty)$

EX 11 :

$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1)* $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ (de la forme $\frac{1}{0^+}$)

* $f(x)-(x+2)=\frac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

Δ:y=x+2 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$

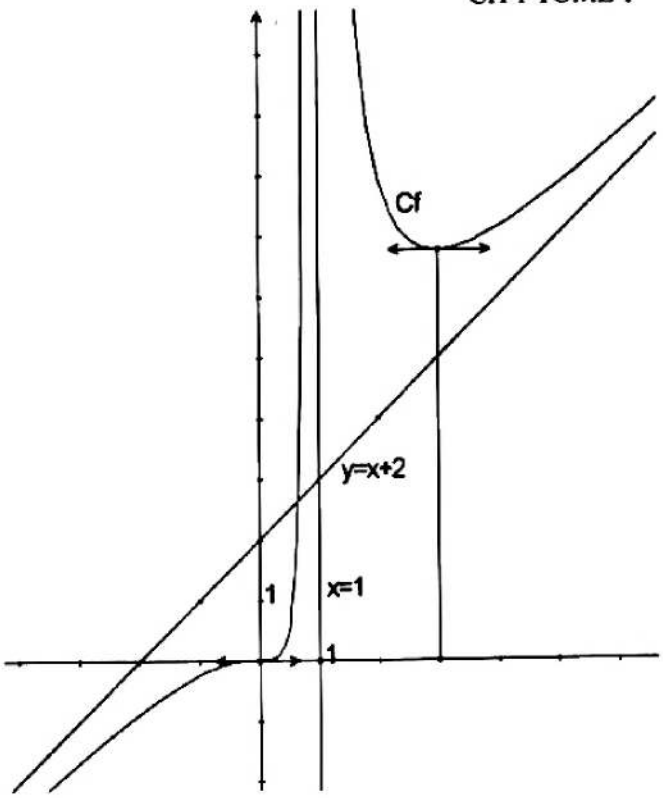
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

Δ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

• $f'(x)=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
f'(x)	+	0	+	||	-	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$	|| $+\infty$	↘	27/4 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



EX 12 :

$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

1) a) $x^2-x+1=0$

$\Delta=-3<0$

d'où $x^2-x+1>0 \;;\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \quad D_f=\mathbb{R}$

b) $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

d'où $f(x)=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

2) a) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})$

$=\frac{3/4}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+(x-\frac{1}{2})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow$

D:y=x-$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

b) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+(x-\frac{1}{2})}$

$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(x-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>|x-\frac{1}{2}|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})>0$

$\Rightarrow f(x)-(x-\frac{1}{2})>0$

(ζ_f) est au dessus de D

3) * $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$

* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$

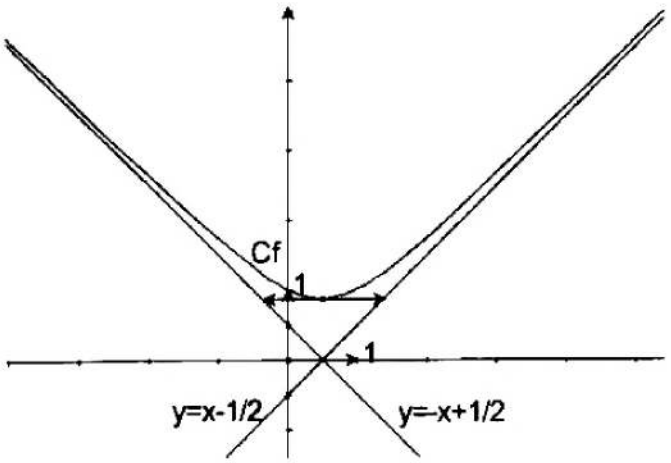
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(1-\frac{1}{x})}{-x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

D':y=-x+$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

4) $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

x	-∞	½	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	+∞ ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ +∞



EX 13 :

1) $(\zeta_f)=(\zeta_3)$

$(\zeta_g)=(\zeta_1)$

$(\zeta_h)=(\zeta_2)$

2) * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite Δ:y=x comme a symptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

EX 14 :

1) $D_f=[1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-1}=-\infty$

d'où : la droite Δ:y=2x est une direction asymptotique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$

2) $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x+2}$

$D_f=[-2,+\infty[/\{0\}$

* $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\sqrt{x+2}=+\infty$

$\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$

la droite d'équation x=0 est une asymptote à (ζ_f)

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

3) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x-1	-	-	0	+
x+1	-	0 +		+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	0 -	0	+

$D_f =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$

• $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty} x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right] = \lim_{x\to-\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right) = -1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$

• $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right) = -1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

EX 15 :

1) $f(x) = x.\sin(\frac{2}{x})$

pour $x \neq 0$ $\quad |f(x)| = |x|.\left|\sin(\frac{2}{x})\right|$

on sait que : $\left|\sin(\frac{2}{x})\right| \le 1 \Rightarrow |x|\left|\sin(\frac{2}{x})\right| \le |x|$

$\Rightarrow |f(x)| \le |x|$

$\lim_{x\to0}|x| = 0$ d'où $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

2) $f(x)=1+x^2.\cos(\frac{1}{x})$

pour $x \neq 0$

$-1 \le \cos(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2.\cos(\frac{1}{x}) \le x^2$

$\Rightarrow 1-x^2 \le 1+x^2.\cos(\frac{1}{x}) \le 1+x^2$

$\Rightarrow 1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$

$\lim_{x\to0}(1-x^2) = \lim_{x\to0}(1+x^2) = 1$

d'où $\lim_{x\to0} f(x) = 1$

3) $f(x) = \frac{1}{x}+\cos(\frac{1}{x})$

* pour $x>0$: $\cos(\frac{1}{x}) \ge -1$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\cos(\frac{1}{x}) \ge -1+\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \ge -1+\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^+}(-1+\frac{1}{x}) = +\infty$ d'où $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

* pour $x<0$ $\quad \cos(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow f(x) \le 1+\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{x}) = -\infty$ d'où $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

conclusion : f n'admet pas de limite en 0

EX 16 :

1) $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{x}$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 1\le 2+\cos x\le 3$

• pour x>0 : $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{2+\cos x}{x}\le\dfrac{3}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• pour x<0 : $\dfrac{3}{x}\le\dfrac{2+\cos x}{x}\le\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{3}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

2) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$ $\quad x\neq 0$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 0\le 1+\cos x\le 2$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

3) $f(x)=\dfrac{x.\sin x}{x^4+x^2+1}$

$|f(x)|=\dfrac{|x|.|\sin x|}{x^4+x^2+1}$

on a : $|\sin x|\le 1\Rightarrow |x|.|\sin x|\le|x|$

$\Rightarrow|f(x)|\le\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

4) $f(x)=\cos x-x$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -x-1\le f(x)\le 1-x$

* $\begin{cases} f(x)\le 1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

* $\begin{cases} f(x)\ge -1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-1-x)=+\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

EX 17 :

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ $\quad x\ge 1$

* $|f(x)|\le\dfrac{1+|\cos x|}{\sqrt{x}}\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ car $|\cos x|\le 1$

* $|g(x)|=\dfrac{x.\sin^4 x}{2x^3+1}$ $\quad car\ \ x\ge 1$

$2x^3+1\ge 2x^3\Rightarrow\dfrac{1}{2x^3+1}\le\dfrac{1}{2x^3}$

$\Rightarrow|g(x)|\le\dfrac{\sin^4 x}{2x^3}\Rightarrow|g(x)|\le\dfrac{1}{2x^2}$ car $\sin^4 x\le 1$

*$\sin x\le 1\Rightarrow 3\sin x\le 3\Rightarrow -x^3+3\sin x\le -x^3+3$

$\Rightarrow h(x)\le -x^3+3$

2) pour $x\ge 1$

* $|f(x)|\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

* $|g(x)|\le\dfrac{1}{2x^2}$ pour $x\ge 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

* pour $x\ge 1$, $h(x)\le -x^3+3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3)=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$

EX 18 :

$f(x)=\dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}$; $x\in\mathbb{R}^*$

1) a) pour x>0

$\sin(\frac{1}{x})\le 1\Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})\ge -1\Rightarrow 2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1$

$\Rightarrow\dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\ge\dfrac{1}{x}$ (car x>0) $\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{1}{x}$

b) $f(x) \geq \frac{1}{x}$ pour x>0 et $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}) = +\infty$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) a) pour x<0

$2-\sin(\frac{1}{x}) \geq 1 \Rightarrow \frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x} \leq \frac{1}{x}$ (car x<0)

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$

b) $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour x<0 et $\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}) = -\infty$

d'où $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EX 19 :

$f(x) = \frac{2x.\sin x}{1+x^2}$

1) a) $|x.f(x)| = \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2}$

* *pour* $x = 0$ *le resultat est evident*

* *pour* $x \neq 0$ $1+x^2 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2} \leq 2|\sin x| \Rightarrow |x.f(x)| \leq 2$ (car $|\sin x| \leq 1$)

b) pour $x \neq 0$

$|x.f(x)| \leq 2 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2}{|x|}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{|x|} = 0$ d'où $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

2) on pose $X = \frac{\pi}{2} - x$

$x \to -\infty$

$X \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\pi-2x)\cos x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2X\cos(\frac{\pi}{2}-X)}{1+X^2}$

$= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X.\sin X}{1+X^2} = \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$

EX 20 :

1) $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2-\cos x \leq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

2) * $f(x) = \frac{x}{2-\cos x}$

pour x>0 : $\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $g(x) = \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

$\cos x \geq -1 \Rightarrow x+\cos x \geq x-1$

pour x>1

$x+\cos x \geq x-1$; $\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3}$

d'où $g(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(x-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

EX 21 :

1) $f(x) = \frac{\cos(3x-1)}{x}$

$-1 \leq \cos(3x-1) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(3x-1)}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour x>0

$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x}) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $f(x) = 4x^2 - 3\cos x$

$\cos x \leq 1 \Rightarrow -3\cos x \geq -3 \Rightarrow 4x^2 - 3\cos x \geq 4x^2 - 3$

$\Rightarrow f(x) \geq 4x^2 - 3$

$\lim_{x\to+\infty} 4x^2 - 3 = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{1-2x} \geq \frac{\sin x}{1-2x} \geq \frac{1}{1-2x}$ pour $x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-2x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{1-2x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-2x} = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4) $f(x)=2+\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

pour $x>0$ $-1\le \sin\sqrt{x}\le 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}}\le\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le f(x)\le 2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; pour $x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$

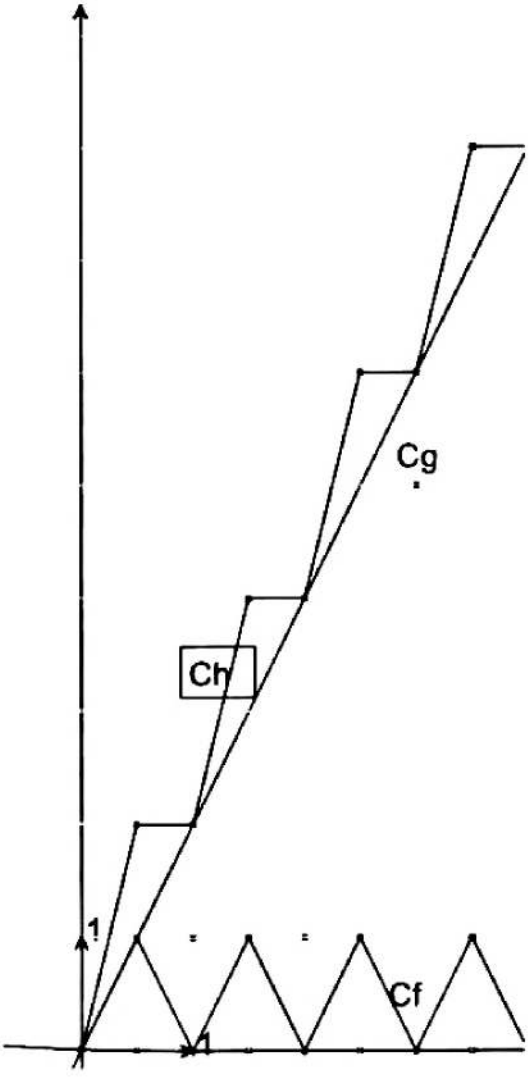
d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

EX 22 :

f est périodique de période 2

$f(x+2)=f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 2-2x & \text{si } x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[\\ f(x-1) & \text{si } x\in]1,2]\end{cases}$$



2) • pour $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

$0\le x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0\le 2x\le 1\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$

• pour $x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$:

$\dfrac{1}{2}<x\le 1\Rightarrow -1\le -2x\le -2$

$\Rightarrow 1\ge 2-2x\ge 0\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$

d'où $0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in[0,1]$

• pour $x\in]1,2]$

$(x-1)\in]0,1]\Rightarrow 0\le f(x-1)\le 1$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in]1,2]$

par suite $0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in[0,2]$

2 est une période de f $\Rightarrow f(x+2k)=f(x)$; $k\in\mathbb{Z}$

d'où $0\le f(x)\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3) (ζ_g) est la droite d'équation : $y=2x$

4) a) $h(x)=f(x)+g(x)$

b) $0\le f(x)\le 1\Rightarrow g(x)\le h(x)\le g(x)+1$

$\Rightarrow 2x\le h(x)\le 2x+1$

* $h(x)\ge 2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

* $h(x)\le 2x+1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$

EX 23 :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; I=$]2,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0$

f est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$

d'où $f(]2,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} f, \lim_{x\to 2^+} f\right[=]1,+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; I=$]-\infty,0]$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<0 \quad \forall x\in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$

$f(]-\infty,0])=\left[f(0), \lim_{-\infty} f\right[=[0,+\infty[$

3) $f(x)=tg(\pi x)$; I=$\left]-\dfrac{1}{2},0\right]$

$f'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x)>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2},0\right]$

d'où $f\left(\left]-\dfrac{1}{2},0\right]\right)=\left]\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f, f(0)\right]=]-\infty,0]$

(car $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} tg(\pi x)=-\infty$)

EX 24 :

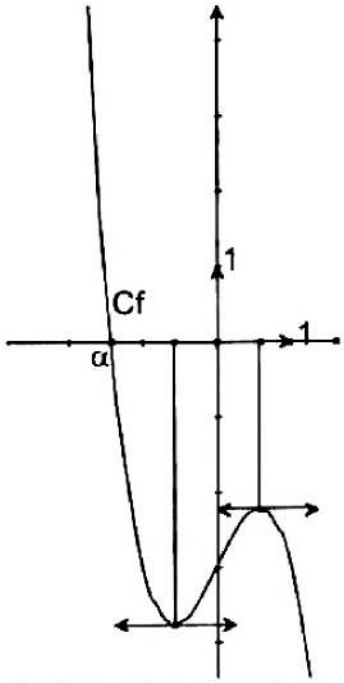
$f(x)=-2x^3+2x-3$

1) $f'(x)=-6x^2+2$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f'(x)	+		0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{-4}{3\sqrt{3}}-3$	↗	$\frac{4}{3\sqrt{3}}-3$	↘	$-\infty$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3}{x}=\lim_{x\to\infty}-2x^2=-\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$



2) l'équation : f(x)=0 admet une uniquz solution α

3) f est continue sur $[-2,-1]$

$f(-2)\times f(-1)=-27<0 \Rightarrow -2<\alpha<-1$ (calculatrice)

EX 25 :

$D_f=[-6,4]/\{2\}$

1)

x	-6		-2		2		4
f(x)	6	↘	1	↗	$+\infty$ $+\infty$	↘	2

2) $f([-6,2[)=[1,+\infty[$

$f(]2,4])=[2,+\infty[$

3) $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

a) $D_h=[-6,4]/\{2\}$ car f ne s'annule pas

b) les variations de f et $\dfrac{1}{f}$ sont contraires sur un intervalle I sur lesquelles elles sont définies

D'où

x	-6		-2		2
h(x)	1/6	↗	1	↘	0

$h(-6) = \frac{1}{6}$

$h(1) = 1$

$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)} = 0$

$h([-6,2[) =]0,1]$

x	2		4
h(x)	|	↗	1/2
	0		

$h(]2,4]) = \left]0,\frac{1}{2}\right]$

c) $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$

h est prolongeable par continuité en 2

EX 26 :

$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$

$D_f =]0,5]$

1) f est continue sur $]0,5]$ comme étant somme de fonctions continues

2) • f est décroissante sur $]0,1]$

• f est croissante sur $[1,5]$

3) · $f(]0,1]) = \left[f(0), \lim_{x\to 0^+} f\right[= [0,+\infty[$

· $f([1,5]) = [f(1), f(5)] = \left[0, 2\sqrt{5} - \frac{14}{5}\right]$

4) a) $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow f(x) = 1$

l'équation admet deux solutions

b) $\varphi(x) = f(x) - 1$ (calculatrice)

* $\varphi(0,3).\varphi(0,4) < 0 \Rightarrow 0,3 < x' < 0,4$
* $\varphi(3,5).\varphi(3,6) < 0 \Rightarrow 3,5 < x'' < 3,6$

EX 27 :

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$

$D_f = [0,+\infty[/ \{1\}$

1) $x \in]0,+\infty[/ \{1\}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$

2) f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$

d'où $f([0,1[) = \left[f(0), \lim_{x\to 1^-} f\right[= [1,+\infty[$

• f est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

d'où $f(]1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 1^+} f, \lim_{+\infty} f\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

3) a) dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

$(x-1)\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

• f est continue sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$

$f(\frac{3}{2}) \times f(2) = (\sqrt{\frac{3}{2}} - 2)(\sqrt{2} - 1) < 0$

d'où l'équation : f(x)=0 admet une solution α dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

comme f est strictement croissante alors α est unique

par suite : l'équation : $(x-1)\sqrt{x} = 0$ admet α comme unique solution dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

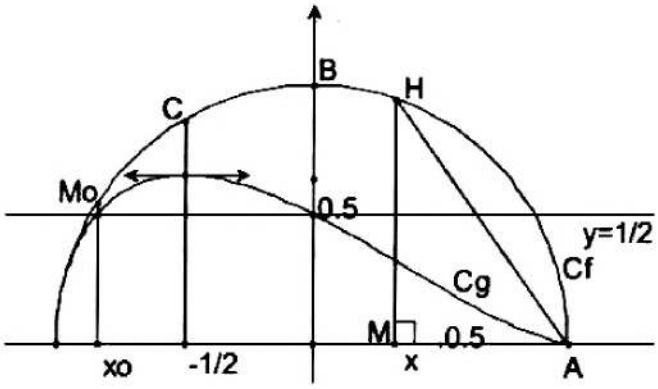
b) f(1,7).f(1,8)<0 donc $1,7 < \alpha < 1,8$
une valeur approchée de α à 10^{-1} prés est 1,7

EX 28 :

$x \in [-1,1]$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$g(x)=\frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$



1) $A(x)=\frac{AH.HM}{2}$

$A(x)=\frac{1}{2}(1-x).f(x)$

$A(x)=g(x)$

2) a) A(x)=g(x) est maximale lorsque

$x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ lorsque M=C (voir figure)

b) $I=\{A(x)\ ;\ x \in [-1,1[\}$

$I=\{g(x)\ ;\ x \in [-1,1[\} = g([-1,1[) = \left[0, g(-\frac{1}{2})\right]$

$I=\left[0,\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$

c) soit a = l'aire du triangle OAB

$a=\frac{1}{2}$

$A(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}$

la droite d'équation : $y=\frac{1}{2}$ coupe (ζ_g)

en deux points

d'où léquation : $g(x)=\frac{1}{2}$ admet deux solutions

l'une de ces solutions est 0

$x=0 \rightarrow M=B$

l'autre $x_0 \rightarrow M=M_0$ (voir figure)

• soit $\varphi(x)=g(x)-\frac{1}{2}$

φ est continue sur $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

$\varphi(-1).\varphi(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{2})<0$

$\Rightarrow -1<x_0<-0,5$

$\varphi(-0,9)\times\varphi(-0,8)<0 \Rightarrow -0,9<x_0<-0,8$

EX 29 :

a<b

$f([a,b]) \subset [a,b]$

1) montrons que l'équation f(x)=x

admet une solution α dans [a,b]

$*f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow h(x)=0$

(avec h(x)=f(x)-x)

* h(a)=f(a)-a ≥ 0 car $f(a) \in [a,b]$

$h(b)=f(b)-b \leq 0$ car $f(b) \in [a,b]$

* h est continue sur [a,b] h(a) et h(b) sont de signes contraires

0 est compris entre h(a) et h(b)

d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires :

il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que: $h(\alpha)=0$

$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$

2) la droite Δ:y=x coupe (ζ_f) en un point A de coordonnées (α,α)

(*Rq* : α n'est pas nécéssairement unique)